

ĐÁP ÁN ĐỀ THI
HỌC PHẦN: TOÁN CAO CẤP 1
Trình độ: Đại học – Mã đề: 4

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1		Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} \right)^n x^n$	2,0
		Ta có : $a_n = \left(\frac{n}{n^2+1} \right)^n$	0,5
		$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n } = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$.	0,5
		Suy ra $r = +\infty$	0,5
		Vậy miền hội tụ của chuỗi là $(-\infty; +\infty)$	0,5
2		1) Tính vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số: $z = e^{\sqrt{x^3+y^5}} \quad (x^3+y^5 > 0)$ 2) Tìm cực trị của hàm 2 biến $z = e^{2x} + e^{3y} - 2x - 3y + 1$	3,0
	1	Ta có : $z'_x = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^5}} e^{\sqrt{x^3+y^5}}$	0,5
		$z'_y = \frac{5y^4}{2\sqrt{x^3+y^5}} e^{\sqrt{x^3+y^5}}$	0,5
		Vậy vi phân toàn phần cấp 1 của hàm 2 biến đã cho là $dz = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^5}} e^{\sqrt{x^3+y^5}} dx + \frac{5y^4}{2\sqrt{x^3+y^5}} e^{\sqrt{x^3+y^5}} dy$	0,5
	2	Ta có : $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^{2x} - 2 = 0, \\ 3e^{3y} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$	0,5
		Hàm số có 1 điểm dừng $M(0;0)$ Các đạo hàm riêng cấp 2 $A = z''_{xx} = 4e^{2x} ; B = z''_{xy} = 0 ; C = z''_{yy} = 9e^{3y}$	0,5
		Tại $M(0;0)$: $B^2 - AC = -36 < 0$; $A = 4 > 0$, hàm đạt cực tiểu tại M , $z_{ct} = 3$	0,5
3		Cho 2 ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$	2,0
		1) Tìm ma trận $A - 5B$ 2) Giải phương trình ma trận $AX = B$	
	1	Ta có: $A - 5B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 10 & -35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 & -11 \\ -10 & 36 \end{bmatrix}$	0,5
	2	$\det(A) = -1 \neq 0$ nên tồn tại A^{-1}	0,5

		Ta tìm được $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	0,5
		$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -31 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$	0,5
4	Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y - 2z = 3 \\ x + 4y = 10 \\ 2x - y + z = 15 \end{cases}$ Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất		2,0
		Hệ đã cho có định thức ma trận hệ số của ẩn $\det(A) = \begin{vmatrix} m & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	0,5
		$= 4m + 17$	0,5
		Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$	0,5
		$\Leftrightarrow m \neq -\frac{17}{4}$	0,5
5	Tích tích phân suy rộng $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^4} dx$		1,0
		$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(1+x)^4} \right) dx$	0,25
		$= \left(-\frac{1}{2(1+x)^2} + \frac{1}{3(1+x)^3} \right) \Big _0^{+\infty}$	0,25
		$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2(1+x)^2} + \frac{1}{3(1+x)^3} \right) + \frac{1}{6}$	0,25
		$= \frac{1}{6}$	0,25

----- HẾT -----

ĐÁP ÁN ĐỀ THI TOÁN CAO CẤP 1

Trình độ: Đại học – Mã đề: 5

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1		Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n$	2,0
		$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n } = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{e}$ suy ra BKHT $r = e$, khoảng hội tụ $(-e; e)$	0,75
		Tại $x = e$: chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} e^n$ có $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} e^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n^2} e^n = 1 \neq 0$	0,75
		Chuỗi phân kì	
		Tương tự tại $x = -e$ chuỗi phân kì.	0,25
		Vậy miền hội tụ của chuỗi là $(-e; e)$	0,25
2		1) Tính vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số: $z = \sin(x^2 + y^3)$	3,0
		2) Tìm cực trị của hàm 2 biến $z = x^2 + 3y^2 + 2x - 6y + 2$	
	1	Ta có : $z'_x = 2x \cos(x^2 + y^3)$	0,5
		$z'_y = 3y \cos(x^2 + y^3)$	0,5
		Vậy vi phân toàn phần cấp 1 của hàm 2 biến đã cho là: $dz = 2x \cos(x^2 + y^3) dx + 3y \cos(x^2 + y^3) dy$	0,5
	2	Ta có : $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ 6y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$	0,5
		Hàm số có 1 điểm dừng $M(-1;1)$	
		Các đạo hàm riêng cấp 2 $A = z''_{xx} = 2$; $B = z''_{xy} = 0$; $C = z''_{yy} = 6$	0,5
		Tại $M(-1;1)$: $B^2 - AC = -12 < 0$; $A = 2 > 0$, hàm đạt cực tiểu tại M, $z_{ct} = -2$	0,5
3		Cho 2 ma trận $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$	2,0
		1) Tìm ma trận $2A + B$ 2) Cho $f(x) = x^2 - 2x$. Tìm $f(A)$	
	1	Ta có: $2A + B = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 8 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$	0,5
	2	Ta có $f(A) = A^2 - 2A$	0,5
		$A^2 = AA = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -8 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}$; $2A = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$	0,5

		Vậy $f(A) = \begin{bmatrix} 19 & -8 \\ 12 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & -12 \\ 18 & -7 \end{bmatrix}$	0,5
4	Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer $\begin{cases} 2x + y - 4z = 3 \\ -x + y + 2z = 0 \\ 4x - 7y - z = 4 \end{cases}$		2,0
		$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & -1 \end{vmatrix} = 21 \neq 0;$	0,5
		$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & -1 \end{vmatrix} = 63; \det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 21; \det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 4 \end{vmatrix} = 21$	1,0
		$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 3; y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = 1; z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = 1$ Hệ trên có nghiệm duy nhất: (3; 1 ; 1)	0,5
5	Tính tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^0 x e^{3x} dx$		1,0
		Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{3x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{cases}$	0,25
		Khi đó $I = \left(\frac{1}{3} x - \frac{1}{9} \right) e^{3x} \Big _{-\infty}^0$	0,25
		$= -\frac{1}{9} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3} x - \frac{1}{9} \right) e^{3x}$	0,25
		$= -\frac{1}{9}$	0,25

ĐÁP ÁN ĐỀ THI
HỌC PHẦN: TOÁN CAO CẤP 1
Trình độ: Đại học – Mã đề: 7

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1		Xét sự hội tụ chuỗi số: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^{3n}$	2,0
	1	Ta có: $u_n = \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^{3n}$	0,5
	2	Theo tiêu chuẩn Cauchy: $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^{3n}}$	0,5
	3	$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^3 = \frac{8}{27} < 1$	0,5
	4	$\Rightarrow$ Chuỗi số hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy.	0,5
2		Xét sự hội tụ và tính giá trị tích phân suy rộng: $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$	2,0
	1	$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-x} dx$	0,5
	2	$= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[(-e^{-x}) \right]_0^A$	0,5
	3	$= \lim_{A \rightarrow \infty} (1 - e^{-A}) = 1$	0,5
	4	Vậy tích phân hội tụ	0,25
	5	$I=1$	0,25
3		Tính vi phân cấp 2 của hàm số $z = f(x, y) = e^y \sin x - 4x^2 y^3 + 6.$	2,0
	1	Ta có : $z'_x = e^y \cos x - 8xy^3$;	0,25
	2	$z'_y = e^y \sin x - 12x^2 y^2$	0,25
	3	$z''_{x^2} = -e^y \sin x - 8y^3$;	0,25
	4	$z''_{xy} = e^y \cos x - 24xy^2$;	0,25
	5	$z''_{y^2} = e^y \sin x - 24x^2 y$;	0,25
	6	Vi phân cấp 2 của hàm số là: $d^2 z = z''_{x^2} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{y^2} dy^2$	0,25
	7	$d^2 z = (-e^y \sin x - 8y^3) dx^2 + 2(e^y \cos x - 24xy^2) dx dy + (e^x \sin x - 24x^2 y) dy^2$	0,5
4		Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, hãy tìm $f(A)$ với $f(x) = x^2 - 5x + I_2$	2,0
	1.	Ta có : $f(A) = A^2 - 5A + I_2$	0,5
	2.	$A^2 = \begin{bmatrix} -19 & -16 \\ 20 & -11 \end{bmatrix}$;	0,5

	3	$-5A = \begin{bmatrix} -5 & 20 \\ -25 & -15 \end{bmatrix}; \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	0,5
	4	$\Rightarrow f(A) = A^2 - 5A + I_2 = \begin{bmatrix} -23 & 4 \\ -5 & -25 \end{bmatrix}$	0,5
5	Giải hệ phương trình tuyến tính theo phương pháp Cramer hoặc Gauss $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$		2,0
	1	Ta có: $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0;$	0,5
	2	$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$	0,5
	3	$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$	0,25
	4	$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$	0,25
	5	Hệ phương trình có nghiệm là $\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} \\ x_2 = \frac{D_2}{D} \\ x_3 = \frac{D_3}{D} \end{cases}$	0,25
	6	Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$	0,25

----- HẾT -----

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC PHẦN TOÁN CAO CẤP 1

Trình độ đại học – Mã đề 01

Câu 1		Tính tích phân suy rộng: $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$	1,0
	1.	Đặt $t = \sqrt{1+e^{2x}}$ ta có $I = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1}$	0,25
	2.	$= \frac{1}{2} \ln \left \frac{t-1}{t+1} \right \Big _{\sqrt{2}}^{+\infty}$	0,5
	3.	$= -\ln(\sqrt{2}-1)$	0,25
Câu 2		Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^3}{6^n}$	2,0
	1.	$u_n = \frac{(n+3)^3}{6^n} \rightarrow u_{n+1} = \frac{(n+4)^3}{6^{n+1}}$	0,5
	2.	$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \frac{(n+4)^3}{(n+3)^3} = \frac{1}{6}$	1,0
	3.	$D < 1$ suy ra chuỗi đã cho hội tụ.	0,5
Câu 3	a)	Tính vi phân toàn phần của hàm số: $z = e^{xy} + x^3 y^2$	1,0
	1.	$z'_x = ye^{xy} + 3x^2 y^2, \quad z'_y = xe^{xy} + 2x^3 y$	0,5
	2.	$dz = (ye^{xy} + 3x^2 y^2)dx + (xe^{xy} + 2x^3 y)dy$	0,5
	b)	Tìm cực trị hàm số $z = 3x^2 + x^3 + 2y^2 + 4y - 9.$	2,0
	1.	Giải hệ: $\begin{cases} z'_x = 6x + 3x^2 = 0 \\ z'_y = 4y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số có 2 điểm dừng: $M_1(0;-1); M_2(-2;-1).$	0,5
	2.	$z''_{xx} = 6 + 6x; \quad z''_{xy} = 0; \quad z''_{yy} = 4$	0,5
	3.	Tại $M(0; -1); A = 6; B = 0; C = 4 \Rightarrow B^2 - AC = -24 < 0$ mà $A = 6 > 0$ $\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu, $Z_{CT} = -11.$	0,5
	4.	Tại $M(-2; -1); A = -6; B = 0; C = 4 \Rightarrow B^2 - AC = 24 > 0$ $\Rightarrow$ Hàm số không có cực trị.	0,5
Câu 4		Xác định a để hệ sau có nghiệm không tầm thường $\begin{cases} ax - 3y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$	2,0
	1	$\det A = \begin{vmatrix} a & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -3 & 1 \\ 2-a & 4 & 0 \\ 2a+3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$	0,5

	2	$= -4a - 20$	0,5
	3	Hệ đã cho có nghiệm không tầm thường khi $\det A = 0$	0,5
	4	Suy ra $-4a - 20 = 0 \leftrightarrow a = -5$	0,5
Câu 5		Tìm ma trận nghịch đảo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$	2,0
	1	Do $\det(A) = 4 \neq 0$ nên A khả đảo.	0,5
	2	Các phần bù đại số: $c_{11} = -2; c_{12} = 6; c_{13} = -2; c_{21} = -2; c_{22} = 4; c_{23} = 0; c_{31} = 4; c_{32} = -6; c_{33} = 2.$	1,0
	3	Vậy ma trận nghịch đảo của A là: $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$	0,5

-----HẾT-----